

Факултет техничких наука у Чачку
Универзитет у Крагујевцу
29.06.2022. год.

Пријемни испит из
МАТЕМАТИКЕ
Основне струковне студије

1. Упростити алгебарски израз

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} - \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2},$$

ако је $x \neq y$ и $(x, y) \neq (0, 0)$.

Решење:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2}{x - y} - \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} &= \frac{(x - y)(x + y)}{x - y} - \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{(x - y)(x + y)} \\ &= x + y - \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} \\ &= \frac{(x + y)^2 - x^2 - xy - y^2}{x + y} \\ &= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - xy - y^2}{x + y} \\ &= \frac{xy}{x + y} \end{aligned}$$

2. Одредити аритметички низ код кога је збир осмог и тринаестог члана 86, а збир првих десет чланова 230.

Решење:

$$a_8 + a_{13} = 86 \Leftrightarrow a_1 + 7d + a_1 + 12d = 86 \Leftrightarrow 2a_1 + 19d = 86.$$

$$S_{10} = 230 \Leftrightarrow 5(2a_1 + 9d) = 230 \Leftrightarrow 2a_1 + 9d = 46.$$

Решење овог система је $a_1 = 5$ и $d = 4$.

3. Решити једначину

$$\log_4 x + 9 \log_{x^2} 2 = 5.$$

Решење:

Једначина има решења за $x > 0$.

$\log_4 x = \frac{1}{2} \log_2 x$ и $\log_{x^2} 2 = \frac{1}{\log_2 x^2} = \frac{1}{2 \log_2 x}$ за $x \neq 1$. Увођењем смене $\log_2 x = t$ под условом да је $x \neq 1$ и $t \neq 0$ полазна једначина своди се на једначину

$$\frac{t}{2} + \frac{9}{2t} = 5 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 = 0,$$

чија су решења $t_1 = 9$ и $t_2 = 1$. Решења полазне једначине су $x_1 = 2^{t_1} = 2^9$ и $x_2 = 2^{t_2} = 2^1 = 2$.

4. Решити једначину

$$9^x = 3^{\frac{x+1}{x}}.$$

Решење:

За $x \neq 0$ важи $9^x = 3^{\frac{x+1}{x}} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{\frac{x+1}{x}}$, па је $2x = \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$. Решења једначине су $x_1 = 1$ и $x_2 = -1/2$.

5. Решити неједначину

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x+1} > 0.$$

Решење:

Задатак решавамо таблицом.

		-1		1		2	
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+
$\frac{(x-1)(x-2)}{x+1}$	-	//	+	0	-	0	+

Решење неједначине је $x \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$.

6. Наћи сва решења тригонометријске једначине

$$\sin(2x) - \cos x = 0$$

на интервалу $(0, 2\pi)$.

Решење:

$$\sin(2x) - \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2 \sin x - 1) = 0.$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 \text{ или } x = 3\pi/2.$$

$$2 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1/2 \Leftrightarrow x = \pi/6 \text{ или } x = 5\pi/6.$$

Скуп решења једначине је $\{\pi/2, 3\pi/2, \pi/6, 5\pi/6\}$.